DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

PARTIE I

1° Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls, telle que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$. On note $f(x)$ sa somme et on suppose qu'il existe $s \in \mathbf{R}^+$ tel que :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = s .$$

a. Montrer que la série de terme général a_n est convergente de somme s.

b. Montrer par un exemple que ce résultat est en général faux pour une suite (a_n) dont les termes ne sont pas tous positifs ou nuls.

2° Soit $F(x)$ une fonction de classe C^∞ sur $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$F^{(n)}(x) \geqslant 0 , \quad \forall\, x \in [0, 1[, \quad \forall\, n \geqslant 0 ,$$

$F^{(n)}$ désignant la dérivée d'ordre n de F. Pour $n \geqslant 0$ on pose :

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(tx)\, dt .$$

a. Montrer que pour $0 \leqslant x < y < 1$ on a :

$$0 \leqslant r_n(x) \leqslant r_n(y) \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} .$$

b. En déduire que pour $0 \leqslant x < 1$, $F(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

c. On remplace l'intervalle $[0, 1[$ par $]-1, 1[$ dans les hypothèses. Montrer que pour $-1 < x < 1$, $F(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

PARTIE II

Notations.

1. Soit $a \in \mathbf{R}^+$. On note $E(0, a)$ l'ensemble des fonctions continues f de $[0, a]$ dans $\mathbf{R}$, qui sont de classe C^2 sur $[0, a[$, et telles que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0, a[$ et $f(a) = 0$.

2. Soit $m \in \mathbf{N}$ et $d \in \mathbf{R}^+$. On considère le problème (I) associé aux conditions :

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &G(y)\,G''(y) + y^{m+1} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y < d \\ &G(0) = 1 \\ &G'(0) = 0 . \end{aligned}$$

1° Supposons qu'il existe $d > 0$ et une fonction $G \in E(0, d)$, solution du problème (I).

Montrer qu'il existe une fonction $g \in E(0, 1)$ et un nombre $k \in \mathbf{R}^+$ tels que :

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} &g(x)\,g''(x) + x^{m+1} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ &g'(0) = 0 \\ &g(1) = 0 \end{aligned}$$

et de plus $g(0) = k$.

2° Montrer que l'équation différentielle

$$G(y)\,G''(y) + y^{m+1} = 0$$

possède une et une seule solution maximale telle que $G(0) = 1$ et $G'(0) = 0$. On énoncera avec précision le théorème utilisé pour cela.

On note maintenant $I =]c, d[$ l'intervalle sur lequel est définie cette solution maximale.

3° On suppose d'abord que $d = +\infty$.

Montrer qu'on ne peut pas avoir :

$$G(y) > 0 , \quad \text{pour tout } y > 0 .$$

En déduire que ce cas est impossible.

4° On a donc $0 < d < +\infty$.

a. Montrer que G peut être prolongée par continuité en $y = d$.

b. En déduire que le problème (I) possède une solution $G \in E(0, d)$.

Tournez la page S. V. P.

page 88 E.N.S. de LYON Option Math-

PARTIE III

On se donne une fonction h de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}^+$, continue.

On considère le problème (III) associé aux conditions :

$$(III)\quad \begin{cases} g(x)\,g''(x) + 2\,xh(x) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ g(1) = 0 \\ g'(0) = 0\,. \end{cases}$$

On se propose de montrer que ce problème admet au plus une solution g dans $E(0, 1)$.

Soient g_1 et g_2 deux éléments de $E(0, 1)$, solutions de (III).

1° On suppose $g_1(0) < g_2(0)$.

a. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1]$ tel que

$$g_1(x) < g_2(x),\ \forall\, x \in [0, x_0[,\ \text{et}\ g_1(x_0) = g_2(x_0)\,.$$

b. Montrer que $g_2''(x) \geqslant g_1''(x)$ sur $]0, x_0[$.

En déduire que $g_2(x) - g_1(x) \geqslant g_2(0) - g_1(0)$, $\forall\, x \in]0, x_0[$. Conclure.

2° On a donc $g_1(0) = g_2(0)$. On suppose maintenant que $g_1(x) - g_2(x)$ n'est pas identiquement nul sur $[0, 1]$.

a. Montrer qu'il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que :

$$g_1(x_1) \neq g_2(x_1) \quad \text{et} \quad g_1'(x_1) = g_2'(x_1)\,.$$

b. En exhibant une contradiction, en déduire que $g_1(x) = g_2(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$.

PARTIE IV

On considère le problème (IV) associé aux conditions :

$$(IV)\quad \begin{cases} g(x)\,g''(x) + 2\,x = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1\,, \\ g'(0) = 0, \\ g(1) = 0\,. \end{cases}$$

1° Montrer que la seule solution g de (IV) appartenant à $E(0, 1)$ est indéfiniment dérivable sur $[0, 1[$.

2° Pour $n \geqslant 0$, donner une expression de $g^{(n+3)}$ en fonction des $g^{(i)}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n + 2$.

3° En déduire que la fonction $F(x) = -[g(x) - g(0)]$ vérifie :

$$F^{(n)}(x) \geqslant 0\,, \qquad \forall\, x \in [0, 1[\,.$$

4° Montrer que $\displaystyle g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$ pour $x \in [0, 1]$.

5° Montrer que $g^{(n)}(0) \neq 0$ si et seulement si $n = 3\,m$, $m \in \mathbf{N}$.

6° On pose $a_0 = g(0)$. Montrer que $g^{(3n)}(0) = -(3\,n)!\,\dfrac{b_n}{a_0^{2n-1}}$, $n = 1, 2, \ldots$ où :

$$b_1 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-1} b_p\,b_{n-p}\left(1 - \frac{6\,p(n-p)}{n(3\,n-1)}\right),\ n \geqslant 2\,.$$

PARTIE V

1° On pose $\displaystyle S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{x^{2n-1}}$, pour $x > 0$ et $N = 1, 2, \ldots$

Montrer que chaque équation $S_N(x) = x$ admet une et une seule racine positive x_N, que la suite $(x_N)_{N>1}$ est croissante et qu'elle converge vers a_0.

2° On considère pour $x \geqslant a_0$ les fonctions :

$$P(x) = x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{x^{2n-1}}, \qquad Q(x) = x^2 - \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Phi(n)}{x^{2(n-1)}},$$

où $\displaystyle \Phi(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6\,k(n-k)}{n(3\,n-1)}\,b_k\,b_{n-k}\,.$

Quelle relation y a-t-il entre $P(x)$ et $Q(x)$?

3° On pose, pour $x > 0$ et $N = 2, 3, \ldots$, $\displaystyle T_N(x) = \sum_{n=2}^{N} \frac{\Phi(n)}{x^{2(n-1)}}$.

Montrer que chaque équation $2/3 - x^2 = T_N(x)$ admet deux racines positives y_N et z_N telles que la suite $(y_N)_{N\geq 2}$ soit croissante, $(z_N)_{N\geq 2}$ soit décroissante, $y_N < a_0 < z_N$ et $\lim y_N = \lim z_N = a_0$ quand N tend vers $+\infty$.

4° En utilisant les suites (x_N) et (z_N) déterminées aux questions 1° et 3° donner une valeur de a_0 avec une erreur inférieure à 10^{-1}.

E.N.S. de LYON
Option Math-Ma...
Page 69
1988

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail